ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

I

I.A. — On désigne par f une fonction réelle définie, continue, *non constante*, $\geqslant 0$ sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$ et admettant sur ce segment une dérivée continue et *constamment* $\geqslant 0$; soit g une autre fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$.

On pose :

$$\varphi(x) = \int_x^b g(t)\,dt \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{et} \qquad \Omega = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

On appelle l et L les bornes (respectivement inférieure et supérieure) de la fonction φ sur $[a, b]$.

1° En utilisant les inégalités :

$l \leqslant \varphi(x) \leqslant L$ et $f'(x) \geqslant 0$ (valables sur $[a, b]$) et une transformation de Ω par intégration par parties, trouver les signes des nombres $\Omega - l f(b)$ et $\Omega - L f(b)$.

2° Démontrer qu'il existe un nombre c vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$ et

$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(b) \cdot \int_c^b g(x)\,dx$ (on pourra justifier, puis utiliser l'inégalité : $f(b) > 0$).

I.B. — On désigne par f une fonction réelle définie, continue, *non constante*, $\geqslant 0$ sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$ et admettant, sur ce segment, une dérivée continue et *constamment* $\leqslant 0$; soit g une autre fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$.

Démontrer qu'il existe un nombre c vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$ et

$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a) \cdot \int_a^c g(x)\,dx$ (on pourra poser $t = -x$).

Dans la suite, une fonction désignée par f peut vérifier les conditions de I.A. ou de I.B., il conviendra de le justifier.

II

1° Dans cette question $0 < a < b$.

En utilisant la partie I avec $f(x) = \frac{1}{x}$, trouver, pour $a \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx \right|$, un majorant numérique.

2° Dans cette question $0 \leqslant a \leqslant b$ et on pose : $I = \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1er cas : $b \leqslant \frac{\pi}{2}$ Démontrer l'inégalité $0 \leqslant I \leqslant 1{,}6$

2e cas : $a \geqslant \frac{\pi}{2}$ Démontrer l'inégalité $|I| \leqslant 1{,}4$

3e cas : $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2} \leqslant b$ Démontrer l'inégalité $|I| \leqslant 3$

Conclusion : $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leqslant 3$ dans tous les cas.

3° Soit p un entier quelconque $\geqslant 1$.

On pose : $J = \int_a^b \frac{\sin px}{x}\,dx$, pour $0 < a < b$.

a. Obtenir pour $|J|$ un majorant dépendant seulement de p et de a (poser $t = px$).

b. Démontrer l'inégalité $|J| \leqslant 3$.

4° Dans cette question $0 < a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$ et p est un entier $\geqslant 1$.

On pose : $H = \int_a^b \frac{\sin px}{\sin x}\,dx$.

a. En utilisant la partie I avec $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ et $g(x) = \frac{\sin px}{x}$, obtenir pour $|H|$ un majorant dépendant seulement de p et a.

b. Démontrer l'inégalité : $|H| \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

. . ./. . .

M 98 E.N.S.I. DE CHIMIE Groupe NORD 1978

5° λ désignant un réel de] 0,1 [et n un entier $\geqslant 0$, on pose :

$$\Gamma_n(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2n+1)x}{\sin x}(-1+\cos 2\lambda x)\,dx.$$

On suppose n entier > 0 et on pose :

$$P_n(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{2\sin(2n+1)x}{\sin x}(-1+\cos 2\lambda x)\,dx$$

$$Q_n(\lambda) = \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2n+1)x}{\sin x}(-1+\cos 2\lambda x)\,dx,$$

de sorte que $\Gamma_n(\lambda) = P_n(\lambda) + Q_n(\lambda)$.

a. Montrer que $|P_n(\lambda)| \leqslant \frac{6\pi}{n}$. On appliquera II.4° et I.A., avec $f(x) = 2(1-\cos 2\lambda x)$.

b. Montrer de même que $|Q_n(\lambda)| \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{n}}$.

On peut ainsi conclure que $\Gamma_n(\lambda)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

III

Dans cette partie λ désigne encore un réel de] 0,1 [. Pour n entier $\geqslant 0$, on pose :

$$\begin{cases} I_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda+k}. \\ J_n(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda-k}. \\ \Delta_n(\lambda) = I_n(\lambda) + J_n(\lambda) - \frac{\Gamma_n(\lambda)}{\sin\lambda\pi} \quad (\Gamma_n(\lambda) \text{ a été définie dans II}). \end{cases}$$

1° Pour k entier $\geqslant 1$ calculer $\Gamma_k(\lambda) - \Gamma_{k-1}(\lambda)$ et en déduire la valeur de $\Delta_k(\lambda) - \Delta_{k-1}(\lambda)$.

2° Pour n entier $\geqslant 0$ en déduire une expression simple de $\Delta_n(\lambda)$.

3° t étant réel $\in$] 0 , 1 [on pose :

$$\alpha_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{k+\lambda-1}$$

$$\beta_n(t) = \frac{1}{t^{1+\lambda}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\, t^{k-1-\lambda}$$

a. Simplifier $\alpha_n(t) - \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}$ et $\beta_n(t) - \frac{t^{-\lambda}}{1+t}$.

b. Calculer $I_n(\lambda) - \int_0^1 \alpha_n(t)\,dt$ et $J_n(\lambda) - \int_0^1 \beta_n(t)\,dt$.

4° *a.* Démontrer que les intégrales

$$A(\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt \quad \text{et} \quad B(\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{-\lambda}}{1+t}\,dt \quad \text{existent.}$$

b. Trouver, pour $|I_n(\lambda) - A(\lambda)|$ et $|J_n(\lambda) - B(\lambda)|$ un même majorant dépendant de n.

5° Démontrer que la somme $I_n(\lambda) + J_n(\lambda)$ tend vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$, (λ restant fixe). En écrivant cette limite de deux manières différentes, calculer $A(\lambda) + B(\lambda)$.

IV

1° Trouver l'ensemble E des nombres réels r tels que l'intégrale

$$\Omega(r) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^r} \quad \text{existe.}$$

2° Pour $r \in E$, on pose $\lambda = \frac{1}{r}$. Introduisant $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$, calculer $\Omega(r)$ en fonction de r. (On pourra utiliser l'égalité :

$$\Omega(r) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^r} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^r} \quad \text{et transformer).}$$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail